Ejercicios de distribuciones discretas

9.1. En un trayecto urbano hay dos semáforos que se cierran cada 2 minutos, permaneciendo en esta situación durante medio minuto. Dichos semáforos están sincronizados de modo que el segundo de ellos se pone rojo a los 2.5 minutos de abrirse el primero.

Si un conductor ha tenido que detenerse en el primero, y el tiempo en minutos que tarda en recorrer la distancia que los separa sigue una distribución uniforme en el intervalo $(1, 4)$, ¿cuál es la probabilidad de que tenga que pararse también en el segundo semáforo?

9.9. En un proceso en serie se fabrican botellas de cola cuya capacidad responde a una distribución normal de media 1 litro y desviación típica 0.01. Se considera inutilizable toda botella con capacidad inferior a 0.99 litros o superior a 1.1 litros. ¿Qué porcentaje de botellas será rechazado?

9.11. El número de horas que un estudiante necesita para aprender un tema de historia es una variable aleatoria con distribución $N(\mu, \sigma)$. Si el 84.13 % de los alumnos emplea más de tres horas y sólo el 2.28 % más de nueve, ¿cuánto valen μ y σ?

9.12. Sea X una variable aleatoria con distribución $N(0, 1)$ y sea $Z = F_X(X)$. Demuéstrese que $E(Z) = \frac{1}{2}$.

9.13. El peso, en gramos, de los recién nacidos en un hospital está distribuido normalmente con media 3 000 y desviación típica σ. ¿Qué valor tiene σ, si el 98 % de los bebés tiene un peso comprendido entre 2.5 y 3.5 kilos?

9.14. Sea X una variable aleatoria con distribución $N(0, \sigma)$. ¿Es $\sqrt{X^2}$ una variable normal?

9.20. Los ingresos mensuales, en miles de euros, de los individuos de un país siguen una distribución logarítmico-normal de parámetros $\mu = 3$ y $\sigma = 2$. ¿Qué porcentaje tiene una renta superior a la media?

9.22. Una empresa produce un cierto tipo de piezas y, una vez vendidas, se hace cargo del coste de la primera reparación. El director del departamento de ventas ha encargado un estudio para determinar la cantidad que ha de costar la hora de reparación de dichas piezas para que, siendo el coste de fabricación mil euros, el precio de venta 5 mil y la distribución del tiempo de reparación una gamma de parámetros $a = 0.5$ y $p = 2$, el beneficio medio sea de 3 mil euros.
a) ¿Cuál ha de ser el coste de la hora de reparación?
b) Fijado este coste, ¿cuál es la probabilidad de que el beneficio no supere las dos mil euros?

9.24. El tiempo, en horas, empleado diariamente en transporte por los trabajadores de una gran ciudad, sigue una distribución gamma con parámetros $a = 2$ y $p = 2$.
a) Calcúlese la probabilidad de que un trabajador emplee más de media hora en transporte.
b) Los trabajadores de un barrio periférico emplean al menos una hora, ¿cuál es la probabilidad de que no superen la hora y media?
c) Determínese el tiempo mínimo que emplea el 50 % de los trabajadores que más tiempo pierden en transporte.

9.28. Una fábrica utiliza dos métodos para la producción de bombillas: el 70 % de ellas las fabrica por el método A y el resto por el método B. La duración de las bombillas sigue una distribución exponencial negativa de media 80 o 100 horas, según se utilice el método A o el B.

Se toman 10 bombillas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que 6 de ellas duren al menos 90 horas?

9.29. El coste de una cierta pieza es de 25 euros. El precio de venta depende del diámetro interior de la pieza, X, variable exponencial negativa de media λ. Si el diámetro, expresado en milímetros, es mayor que 3 o menor que 1, se desecha la pieza y, si el diámetro está comprendido entre estos límites, se vende al precio de 40 euros. La máquina que produce la pieza tiene un dispositivo que permite ajustar el diámetro medio de las piezas, λ. Hállese el valor de λ que maximice el beneficio medio.

9.30. El tiempo, en días, que tarda una empresa en servir los pedidos a sus clientes es una variable aleatoria con distribución exponencial negativa de media 5 días. Han pasado algunos días y un cliente aún no ha recibido su pedido. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga que esperar al menos 2 días más?

9.31. En un laboratorio, el 40 % de los ratones sometidos a un cierto estímulo son machos. El tiempo, en minutos, que un ratón tarda en responder al estímulo es una variable aleatoria exponencial negativa, siendo el tiempo medio de respuesta el doble en los machos que en las hembras.

Se toma un ratón al azar y se le somete al experimento. Si la probabilidad de que tarde más de 4 minutos en responder es 0.8, obténganse los tiempos medios de respuesta para los machos y hembras.

9.37. Sea X una variable aleatoria con distribución beta, $\beta(2,2)$. Obténgase la media, la moda, la mediana y el coeficiente de variación.

9.38. La proporción de alumnos de una facultad que aprueban la asignatura de Estadística cada año, es una variable aleatoria con distribución beta de parámetros $p = 3$ y $q = 2$.
a) Calcúlese la probabilidad de que, en un año cualquiera, suspendan menos del 20 %.
b) Hállese la probabilidad de que la proporción de estudiantes que aprueban en un año sea menor que la proporción media de aprobados.

9.39. Una variable aleatoria X tiene como función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5}{3}\left(\frac{3}{x}\right)^6 & x \geq x_0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Determínese el valor de x_0.
b) ¿Qué distribución sigue X?
c) Calcúlese $E(X)$.

9.41. Sea X una variable aleatoria con distribución de Pareto de parámetros α y x_0.
a) Obténgase el coeficiente de variación y la mediana.
b) Calcúlese $p[X < E(X)]$.

9.48. Calcúlense los deciles de una distribución logística estándar y compárense con los de la distribución $N(0,1)$.

Ejercicio 9.1.

Puesto que el segundo semáforo se cierra a los 2.5 minutos de ponerse verde el primero y permanece en rojo 0.5 minutos, el conductor no tendrá más remedio que parar su coche cuando emplee un tiempo entre 2.5 y 3 minutos en ir de uno a otro. Es decir, denotando por X la variable que designa este tiempo, la probabilidad pedida es

$$p[2.5 < X < 3] = \int_{2.5}^{3} \frac{1}{3}\,dx = 0.166 \ .$$

Ejercicio 9.9.

La variable X, *capacidad de una botella*, sigue una distribución $N(1, 0.01)$. Se rechaza una botella, si $X < 0.99$, o bien, si $X > 1.1$; entonces, designando por Z a la variable tipificada,

$$\begin{aligned} p(\text{rechazar una botella}) &= p[X < 0.99 \text{ o } X > 1.1] = p[X < 0.99] + p[X > 1.1] = \\ &= p\left[Z < \frac{0.99-1}{0.01}\right] + 1 - p\left[Z \leq \frac{1.1-1}{0.01}\right] = \\ &= \Phi(-1) + 1 - \Phi(10) \ , \end{aligned}$$

donde Φ denota la función de distribución de la normal estándar. Ahora bien, las tablas de esta distribución no proporcionan los valores para $z < 0$. Entonces, teniendo en cuenta la simetría de la distribución normal, $\Phi(-1) = 1-\Phi(1)$, y, consultando las citadas tablas,

$$p(\text{rechazar una botella}) = 1 - \Phi(1) + 1 - \Phi(10) \approx 1 - 0.8413 + 1 - 1 = 0.1587 \ ,$$

esto es, se rechazará el 15.87 % de las botellas.

Ejercicio 9.11.
Denotando por X el *número de horas necesarias para aprender un tema*, $X \hookrightarrow N(\mu, \sigma)$, entonces,

$$p[X > 3] = 0.8413 \qquad \text{y} \qquad p[X > 9] = 0.0228 \ .$$

Designando por Z a la variable tipificada, las probabilidades de los sucesos complementarios son:

$$p[X \leq 3] = p\left[Z \leq \frac{3-\mu}{\sigma}\right] = \Phi\left(\frac{3-\mu}{\sigma}\right) = 0.1587$$

y

$$p[X \leq 9] = p\left[Z \leq \frac{9-\mu}{\sigma}\right] = \Phi\left(\frac{9-\mu}{\sigma}\right) = 0.9772 \ .$$

Con lo cual, buscando en las tablas de la normal estándar, resulta

$$\frac{3-\mu}{\sigma} = -1 \qquad \text{y} \qquad \frac{9-\mu}{\sigma} = 2 \ ,$$

sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas de cuya resolución se obtiene $\mu = 5$ y $\sigma = 2$.

Ejercicio 9.12.
La función de distribución de Z, para $0 < z < 1$, es

$$F_Z(z) = p[Z \leq z] = p[F_X(X) \leq z] = p[X \leq F_X^{-1}(z)] \ ,$$

ya que, al ser F_X estrictamente monótona creciente, existe su inversa, que también es estrictamente monótona creciente, con lo cual, si $0 < z < 1$,

$$F_Z(z) = F_X(F_X^{-1}(z)) = z \ ,$$

anulándose para $z \leq 0$ y valiendo uno para $z \geq 1$.

Por tanto, la función de densidad de Z resulta

$$f_Z(z) = \begin{cases} 1 & 0 < z < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

es decir, Z sigue una distribución $\mathcal{U}(0,1)$. Entonces, su esperanza es el punto medio del intervalo, esto es,

$$E(Z) = \frac{1}{2} \ .$$

Adviértase que este resultado no es exclusivo de la distribución $N(0,1)$; cualquier variable continua, X, cuya función de distribución sea estrictamente creciente en el campo de variación de X, también lo verifica, según se indica en el resumen teórico de este capítulo.

Ejercicio 9.13.
La variable X, *peso, en gramos, de los recién nacidos*, sigue una distribución $N(3\,000, \sigma)$. Como $p[2\,500 < X < 3\,500] = 0.98$, tipificando, se obtiene:

$$\begin{aligned} p[2\,500 < X < 3\,500] &= p\left[\frac{2\,500 - 3\,000}{\sigma} < \frac{X - 3\,000}{\sigma} < \frac{3\,500 - 3\,000}{\sigma}\right] = \\ &= \Phi\left(\frac{500}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{500}{\sigma}\right) = \\ &= 2\Phi\left(\frac{500}{\sigma}\right) - 1 = 0.98 \ , \end{aligned}$$

dado que, por la simetría de la función de densidad normal, $\Phi\left(-\frac{500}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{500}{\sigma}\right)$. Por tanto,

$$\Phi\left(\frac{500}{\sigma}\right) = 0.99 \ .$$

Buscando en las tablas de la distribución normal estándar, resulta $\frac{500}{\sigma} = 2.33$, es decir, $\sigma = 214.6$.

Ejercicio 9.14.
La variable $Y = \sqrt{X^2}$ es la variable $|X|$ y no la variable X como pudiera parecer. Por tanto, sólo toma valores positivos, no siendo posible, en consecuencia, que su distribución corresponda a la de una normal. Comprobémoslo.

La función de distribución de Y, para cualquier $y > 0$, es

$$\begin{aligned} F_Y(y) = p[\sqrt{X^2} \leq y] &= p[X^2 \leq y^2] = p[-y \leq X \leq y] = \\ &= p\left[-\frac{y}{\sigma} \leq \frac{X}{\sigma} \leq \frac{y}{\sigma}\right] = \\ &= \Phi\left(\frac{y}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{y}{\sigma}\right) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{y}{\sigma}\right) - 1 \,, \end{aligned}$$

anulándose para valores de $y \leq 0$.

Derivando se obtiene la función de densidad de Y,

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

función de densidad que no es la de una normal.

Ejercicio 9.20.
Si X sigue una distribución $logN(3,2)$, su media es

$$E(X) = e^{3+\frac{2^2}{2}} = e^5 \,.$$

Entonces, como $\ln X$ es una normal $N(3,2)$,

$$p[X > e^5] = p[\ln X > 5] = 1 - \Phi\left(\frac{5-3}{2}\right) = 0.1587 \,,$$

es decir, el 15.87 % de los individuos tiene ingresos superiores a la media.

Ejercicio 9.22.
a) Sabemos que el beneficio es la diferencia entre ingresos y gastos. En este caso, el ingreso es fijo (5 mil euros) y los gastos, mil euros fijas de fabricación y $C \cdot X$ de reparación, donde X es la variable que designa *el tiempo, en horas, empleado en la reparación* y C el coste por hora de la misma. Por tanto, el *beneficio en miles de euros*, B, es

$$B = 5 - (CX + 1)$$

y, consecuentemente, el beneficio medio es

$$E(B) = 5 - [C \cdot E(X) + 1] \,.$$

Como X sigue una distribución $\gamma(0.5, 2)$, el tiempo medio que se tarda en reparar una pieza es

$$E(X) = \frac{2}{0.5} = 4 \text{ horas} \,,$$

y, si se desea que el beneficio medio sea de 3 mil euros, bastará despejar para obtener $C = 0.25$. Es decir, hay que cobrar 250 euros por hora de reparación, si se espera obtener un beneficio de 3 mil euros por pieza.

b) Fijado un coste de 250 euros por hora de reparación, *el beneficio, en miles de euros*, es

$$B = 5 - (0.25\,X + 1) = 4 - 0.25 \cdot X \,.$$

Entonces, la probabilidad de que *el beneficio no supere las 2 mil euros* es

$$\begin{aligned} p[B \leq 2] &= p[4 - 0.25 \cdot X \leq 2] = p[X \geq 8] = \\ &= \int_{x=8}^{\infty} 0.5^2\, x\, e^{-0.5x}\, dx = 0.078 \,. \end{aligned}$$

Ejercicio 9.24.
Sea X el *tiempo, en horas, empleado diariamente en transporte*, variable que sigue una distribución $\gamma(2,2)$. Entonces, su función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} 4xe^{-2x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Integrando *por partes*, se obtiene la función de distribución de X que, para $x > 0$, es

$$F(x) = \int_{t=0}^{x} 4te^{-2t}\,dt = 1 - 2xe^{-2x} - e^{-2x} ,$$

anulándose en el resto.

a) La probabilidad de que *un trabajador emplee más de media hora en transporte* es

$$p[X > 0.5] = 1 - p[X \leq 0.5] = 1 - F(0.5) = 2e^{-1} = 0.736 .$$

b) Si un trabajador emplea al menos una hora en transporte, la probabilidad de que *no supere la hora y media* es

$$p[X \leq 1.5 \mid X \geq 1] = \frac{p[1 \leq X \leq 1.5]}{p[X \geq 1]} = \frac{F(1.5) - F(1)}{1 - F(1)} = 1 - \frac{4}{3} \cdot e^{-1} = 0.509 .$$

c) Tenemos que hallar el valor de m, tal que

$$p[X > m] = 0.5 ,$$

es decir,

$$F(m) = 0.5 .$$

Entonces, el valor buscado es la solución de la ecuación

$$1 - 2me^{-2m} - e^{-2m} = 0.5 ,$$

o, lo que es lo mismo,

$$e^{2m} - 4m - 2 = 0 .$$

Dicho valor, obtenido por aproximación, resulta ser $m = 0.84$, esto es, el 50 % de los trabajadores que pierden más tiempo en transporte, pierden, como mínimo, 0.84 horas. El lector advertirá que este valor no es otro que la mediana de la distribución.

Ejercicio 9.28.

Denotemos por X_A y X_B a las variables que recogen la duración de una bombilla fabricada por el método A y por el método B, respectivamente. Ambas variables siguen una distribución exponencial negativa de parámetros $\frac{1}{80}$ y $\frac{1}{100}$. Asimismo, denotemos por X la *duración de una bombilla* sea cual sea el método de fabricación. Entonces, designando por A y B los sucesos *estar fabricada por el método A* y *estar fabricada por el B*, la probabilidad de que *una bombilla dure al menos 90 horas* es

$$\begin{aligned} p[X \geq 90] &= p(A) \cdot p[X \geq 90 \mid A] + p(B) \cdot p[X \geq 90 \mid B] = \\ &= p(A) \cdot p[X_A \geq 90] + p(B) \cdot p[X_B \geq 90] = \\ &= 0.7 \cdot \int_{x=90}^{\infty} \frac{1}{80} \cdot e^{-\frac{x}{80}}\,dx + 0.3 \cdot \int_{x=90}^{\infty} \frac{1}{100} \cdot e^{-\frac{x}{100}}\,dx = 0.349 . \end{aligned}$$

Sea Y el *número de bombillas, entre 10, que duran al menos 90 horas.* Esta variable sigue una distribución $\mathcal{B}(10, 0.349)$. Por tanto, la probabilidad de que *6 bombillas duren al menos 90 horas* es

$$p[Y = 6] = \binom{10}{6} 0.349^6 \cdot 0.651^4 = 0.068 .$$

Ejercicio 9.29.

La variable X, *diámetro interior de una pieza, en milímetros*, sigue una distribución $\mathcal{E}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$. Si una pieza se desecha, se produce una pérdida de 25 euros, su coste; si no se desecha, se obtiene un beneficio de 15 euros (su precio de venta, 40 euros, menos su coste, 25). Entonces, el *beneficio*, B, es una variable aleatoria que toma dos valores,

$$B : \left| \begin{array}{ll} -25 & \text{si } X > 3 \text{ o } X < 1 \\ 15 & \text{si } 1 \leq X \leq 3 \end{array} \right.$$

Obtengamos la probabilidad de aceptar una pieza:

$$p[1 \leq X \leq 3] = \int_{x=1}^{3} \frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\frac{x}{\lambda}}\,dx = e^{-\frac{1}{\lambda}} - e^{-\frac{3}{\lambda}}$$

y, por tanto, la probabilidad de aceptar una pieza es

$$p[X > 3 \ \text{ o } \ X < 1] = 1 - e^{-\frac{1}{\lambda}} + e^{-\frac{3}{\lambda}} \ .$$

En consecuencia, la distribución de la variable *beneficio*, B, es

$$B : \left| \begin{array}{ll} -25 & \quad p[B = -25] = 1 - e^{-\frac{1}{\lambda}} + e^{-\frac{3}{\lambda}} \\ 15 & \quad p[B = 15] = e^{-\frac{1}{\lambda}} - e^{-\frac{3}{\lambda}} \end{array} \right.$$

Entonces, el beneficio medio resulta

$$\begin{aligned} E(B) &= -25 \cdot (1 - e^{-\frac{1}{\lambda}} + e^{-\frac{3}{\lambda}}) + 15 \cdot (e^{-\frac{1}{\lambda}} - e^{-\frac{3}{\lambda}}) = \\ &= 40 \cdot e^{-\frac{1}{\lambda}} - 40 \cdot e^{-\frac{3}{\lambda}} - 25 \ . \end{aligned}$$

Considerando que $E(B)$ es una función de λ, hallemos el valor de λ que la maximiza, igualando su derivada a cero. Así,

$$\frac{d}{d\lambda} E(B) = 40 \cdot e^{-\frac{1}{\lambda}} \cdot \frac{1}{\lambda^2} - 40 \cdot e^{-\frac{3}{\lambda}} \cdot \frac{3}{\lambda^2} = 0 \ ,$$

de donde se obtiene $\lambda = \frac{2}{\ln 3} = 1.82$. (Puede el lector comprobar que la segunda derivada es negativa en dicho punto, en concreto vale -4.2, lo que confirma que en 1.82 se alcanza el máximo.) Por tanto, la máquina tiene que ajustarse para que el diámetro medio de las piezas sea 1.82 milímetros, maximizándose, entonces, el beneficio medio.

Ejercicio 9.30.
Hemos de calcular

$$p[X > t + 2 \mid X > t] \ ,$$

donde X es la variable con distribución $\mathcal{E}\left(\frac{1}{5}\right)$ y t el número de días que han transcurrido.

La propiedad del olvido que verifican las exponenciales negativas, dice que dicha probabilidad es

$$p[X > t + 2 \mid X > t] = p[X > 2] = \int_{x=2}^{\infty} \frac{1}{5} \cdot e^{-\frac{x}{5}} \, dx = e^{-2/5} = 0.670 \ .$$

Ejercicio 9.31.
Llamemos X_M al *tiempo que tarda en responder un macho*, variable que sigue una distribución $\mathcal{E}\left(\frac{1}{2\lambda}\right)$, y X_H, al *tiempo que tarda en responder una hembra*, variable con distribución $\mathcal{E}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, ya que $E(X_M) = 2 \cdot E(X_H)$. Llamando X al *tiempo de respuesta de un ratón*, sea macho o hembra, se sabe que

$$\begin{aligned} 0.8 = p[X > 4] &= p(M) \cdot p[X > 4 \mid M] + p(H) \cdot p[X > 4 \mid H] = \\ &= p(M) \cdot p[X_M > 4] + p(H) \cdot p[X_H > 4] = \\ &= 0.4 \cdot \int_{x=4}^{\infty} \frac{1}{2\lambda} \cdot e^{-\frac{x}{2\lambda}} dx + 0.6 \cdot \int_{x=4}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\frac{x}{\lambda}} dx = \\ &= 0.4 \cdot e^{-\frac{2}{\lambda}} + 0.6 \cdot e^{-\frac{4}{\lambda}} \ , \end{aligned}$$

donde M y H designan los sucesos *ratón macho* y *ratón hembra*, respectivamente. Entonces,

$$0.6 \cdot e^{-\frac{4}{\lambda}} + 0.4 \cdot e^{-\frac{2}{\lambda}} - 0.8 = 0$$

ecuación de segundo grado en $e^{-\frac{2}{\lambda}}$, cuya única solución posible es $e^{-\frac{2}{\lambda}} = 0.8685$, de donde resulta el valor $\lambda = 14.19$. Por tanto, el tiempo medio de respuesta es de 14.19 minutos para los ratones hembras y de 28.38 para los machos.

Ejercicio 9.37.
La función de densidad de la variable X es

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

siendo conocida su media,

$$E(X) = \frac{p}{p+q} = \frac{2}{2+2} = 0.5 \ .$$

La moda se obtiene derivando la función de densidad e igualando a cero:

$$f'(x) = 6 - 12x = 0 \, .$$

El valor obtenido, 0.5, hace negativa la segunda derivada. Es decir, f alcanza el máximo en 0.5 y, por tanto, $Mo = 0.5$.

Para calcular la mediana,

$$p[X \leq Me] = \int_{x=0}^{Me} 6x(1-x)\,dx = 3Me^2 - 2Me^3 = 0.5 \, ,$$

ecuación de tercer grado que tiene tres soluciones: una es negativa, otra 1.3 y la tercera 0.5. Las dos primeras no tienen sentido pues la mediana tiene que ser un punto en el intervalo $(0, 1)$; por tanto, $Me = 0.5$.

Nótese que, para una distribución $\beta(2, 2)$, media, moda y mediana coinciden, dado que, su función de densidad, ésta es simétrica y unimodal.

La varianza de X es, también, un valor conocido

$$Var(X) = \frac{pq}{(p+q+1)(p+q)^2} = \frac{2 \cdot 2}{(2+2+1)(2+2)^2} = \frac{1}{20} \, ,$$

con lo cual el coeficiente de variación es

$$CV = \frac{\sqrt{Var(X)}}{E(X)} = \frac{\sqrt{1/20}}{1/2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \, .$$

Ejercicio 9.38.

a) La variable X, *proporción de aprobados en Estadística*, sigue una distribución $\beta(3, 2)$, con lo cual, su función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} 12x^2(1-x) & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

La probabilidad de *suspender menos del 20 %* es la misma que la de *aprobar más del 80 %*. En consecuencia,

$$p[X > 0.8] = \int_{0.8}^{1} 12x^2(1-x)dx = 0.18 \, .$$

b) La media de aprobados es

$$E(X) = \frac{p}{p+q} = \frac{3}{5} \, .$$

Entonces,

$$p\left[X < \frac{3}{5}\right] = \int_{0}^{\frac{3}{5}} 12x^2(1-x)dx = 0.48 \, .$$

Ejercicio 9.39.

a) Como f es una función de densidad,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \, ,$$

es decir,

$$\int_{x=x_0}^{\infty} \frac{5}{3}\left(\frac{3}{x}\right)^6 dx = \left[-\left(\frac{3}{x}\right)^5\right]_{x=x_0}^{\infty} = \left(\frac{3}{x_0}\right)^5 = 1 \, .$$

Despejando, se obtiene $x_0 = 3$.

b) La función de densidad, puede escribirse como

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5}{x}\left(\frac{3}{x}\right)^5 & x \geq 3 \\ 0 & x < 3 \end{cases}$$

corresponde a la de una distribución de Pareto de parámetros $\alpha = 5$ y $x_0 = 3$.

c) El cálculo de la esperanza de X es, así, inmediato:

$$E(X) = \frac{\alpha x_0}{\alpha - 1} = \frac{5 \cdot 3}{5 - 1} = \frac{15}{4} \, .$$

Ejercicio 9.41.

a) Si X sigue una distribución de Pareto, conocemos su media y su varianza, entonces, sustituyendo, la expresión del coeficiente de variación es

$$CV = \frac{\sqrt{Var(X)}}{E(X)} = \sqrt{\frac{1}{\alpha(\alpha-2)}} \; ,$$

siempre que α sea mayor que 2.

Obsérvese que el coeficiente de variación no depende del valor mínimo, x_0; únicamente depende de α, decreciendo cuando este parámetro crece.

Para hallar la mediana, calculemos previamente la función de distribución de X:

$$F(x) = \int_{t=x_0}^{x} \frac{\alpha}{t}\left(\frac{x_0}{t}\right)^{\alpha} dt = \left[-\left(\frac{x_0}{t}\right)^{\alpha}\right]_{t=x_0}^{x} = 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha} \; ,$$

para $x \geq x_0$, siendo nula para $x < x_0$.

Entonces, como la mediana verifica que $p[X \leq Me] = 0.5$, es decir,

$$1 - \left(\frac{x_0}{Me}\right)^{\alpha} = 0.5 \; ,$$

resulta $Me = x_0 \cdot 2^{\frac{1}{\alpha}}$.

b) Finalmente, si $\alpha > 1$,

$$p[X < E(X)] = F\left(\frac{\alpha x_0}{\alpha - 1}\right) = 1 - \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{\alpha} \; .$$

Ejercicio 9.48.

El primer decil, d_1, valor de la variable que deja a su izquierda el 10 % de la probabilidad, se obtiene igualando la función de distribución, hallada en el ejercicio anterior, a 0.10; así,

$$F_Y(d_1) = 0.10 \; ,$$

o, lo que es lo mismo,

$$\frac{1}{1+e^{-d_1}} = 0.10 \; ,$$

resultando

$$d_1 = -\ln 9 = -2.20 \; .$$

Igualmente, se obtiene el i-ésimo decil ($i = 2, 3, \ldots, 9$) resolviendo la ecuación

$$F_Y(d_i) = \frac{i}{10} \; .$$

Entonces,

$$\begin{array}{lllll} d_1 = -2.20, & d_2 = -1.39, & d_3 = -0.85, & d_4 = -0.40, & d_5 = 0, \\ d_6 = 0.40, & d_7 = 0.85, & d_8 = 1.39 \text{ y} & d_9 = 2.20 \; . & \end{array}$$

Hallemos, ahora, los deciles de una distribución $N(0,1)$, buscando en las tablas de la normal tipificada los valores d_i ($i = 1, \ldots, 9$) tales que

$$\Phi(d_i) = \frac{i}{10} \; .$$

De este modo resulta

$$\begin{array}{lllll} d_1 = -1.28, & d_2 = -0.84, & d_3 = -0.52, & d_4 = -0.25, & d_5 = 0, \\ d_6 = 0.25, & d_7 = 0.52, & d_8 = 0.84 \text{ y} & d_9 = 1.28 \; . & \end{array}$$

Obsérvese que la simetría de la distribución logística y de la normal hacen que los deciles también presenten una estructura simétrica.

Como puede comprobarse comparando los deciles para ambas distribuciones, la distribución logística estándar no sólo está más dispersa globalmente que la normal estándar (la varianza de aquélla es $\frac{\pi^2}{3}$, mientras que la de ésta es 1), sino que esa dispersión es mayor a lo largo de todos los valores reales.